MAT 307 groupe PM-5 **Contrôle continu** **27 novembre 2017**

Le barême est sur 23 points, les quatre exercices sont indépendants.

Exercice 1. *Courbe paramétrée (10 points)* On étudie la courbe paramétrée $M(t) = (\cos t, \sin^3 t)$.

1. *(1 point)* Quel est le domaine de définition de la courbe ?
2. *(2 points)* En précisant la périodicité de la courbe et ses symétries, montrer qu'on peut restreindre l'étude de la courbe à $I = [0, \pi/2]$. On restreint dans les questions 3 à 6 l'étude à l'intervalle I.
3. *(1 point)* Etudier les variations de l'abscisse et de l'ordonnée de M.
4. *(1 point)* Quel(s) est (sont) le(s) point(s) singulier(s) ?
5. *(2 points)* Donner l'équation de la tangente aux points singuliers.
6. *(2 points)* Donner en justifiant la position de la courbe par rapport à la tangente aux points singuliers.
7. *(1 point)* Tracer l'ensemble de la courbe (indication : vérifier la cohérence avec les résultats des questions précédentes).

Exercice 2. *Forme différentielle (5 points)*

1. *(0,5 point)* On fixe un paramètre réel λ. Donner le domaine de définition de la forme différentielle $\omega = \lambda y \mathrm{d}x + x \mathrm{d}y$.
2. *(1,5 point)* Selon les valeurs de λ, dire si ω est fermée.
3. *(1,5 point)* Si $\lambda = 1$, trouver une fonction $V : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que $\omega = \mathrm{d}V$.
4. *(1,5 point)* Si $\lambda = 1$, calculer l'intégrale de ω le long de l'arc paramétré $\gamma : t \in [0, \pi/2] \mapsto (\cos t, \sin t)$.

Exercice 3. *(3 points)* Donner une solution de $y'(t) + 2y(t) = t^2$.

Exercice 4. *Circuit RLC (5 points), les questions* 1 *et* 2 *sont indépendantes.* On fixe des constantes $R, U \geq 0$ et $L, C > 0$. On considère l'équation différentielle (2) : $Lq''(t) + 2Rq'(t) + \frac{q(t)}{C} = U \sin(t/\sqrt{LC})$.

1. On suppose $U = 0$ et $R^2 > L/C$ dans cette question.
   (a) *(1,5 point)* Donner toutes les solutions réelles de l'équation (2).
   (b) *(0,5 point)* Quel est le comportement des solutions quand $t \to +\infty$?
2. On suppose $R = 0$ dans cette question.
   (a) *(2 points)*Trouver une solution particulière réelle q_p de l'équation (2) (on pourra penser à considérer l'équation différentielle $Lq''(t) + \frac{q(t)}{C} = U \exp(it/\sqrt{LC})$).
   (b) *(1 points)* Donner l'ensemble de toutes les solutions réelles de (2).